



ТЕОРІЯ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

1. Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	Страхова та фінансова математика
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	очна(денна) /дистанційна/змішана
Рік підготовки, семестр	3 курс, осінній
Обсяг дисципліни	4 кредити/120 год., з них лекції – 36 год., практичні – 36 год., самостійна робота – 48 год.
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Залік
Розклад занять	на тиждень: лекції – 2 год., практичні – 2 год. http://roz.kpi.ua/
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: д.ф.-м.н., Іванов Олександр Володимирович, email: alexntuu@gmail.com , тел. 067-966-84-21. Практичні: к.ф.-м.н., доцент Боднарчук Семен Володимирович, email: sem_bodn@ukr.net , тел. 050-748-13-17.
Розміщення курсу	https://campus.kpi.ua

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Цілі дисципліни	Дисципліна “Теорія міри та інтеграл Лебега” спрямована на засвоєння здобувачами бакалаврського рівня вищої освіти як абстрактного поняття міри множин, так і важливих прикладів міри Лебега та мір Лебега -Стільтьєса на відповідних σ -алгебрах вимірних множин у евклідових просторах. Крім вивчення основ теорії міри як важливого елемента математичної освіти, головна мета навчальної дисципліни полягає в тому, щоб ознайомити майбутніх фахівців-математиків з побудовою інтеграла Лебега від вимірних функцій, який є істотним розширенням класичного інтеграла Рімана та широко використовується для опису багатьох об’єктів у різних галузях сучасної математики. Так, теорія міри та інтеграла Лебега є основою сучасної теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії випадкових процесів тощо.
Предмет навчальної дисципліни	Предмет навчальної дисципліни - це основні поняття теорії множин, основні класи множин та їх властивості, основні властивості міри, зокрема, мір Лебега та Лебега-Стільтьєса, теорія продовження міри, основні властивості функцій обмеженої варіації, заряди, основні поняття теорії вимірних функцій, зокрема, збіжність майже скрізь та за мірою, основні властивості інтеграла Лебега, граничні теореми для інтеграла Лебега, поняття абсолютної неперервності та сингулярності мір, добутку мір, кратних та повторних інтегралів Лебега. Розглядаються також класичні теореми Лебега, Каратеодорі, Хана-Банаха, Єгорова, Лузіна, Радона-Нікодіма, Фубіні-Тонеллі тощо.
Компетентності	ЗК1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. ЗК3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності. ЗК7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями. ЗК8 Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел. ЗК12 Здатність працювати автономно. ЗК13 Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов’язків.

	ЗК16 Здатність проявляти творчий підхід та ініціативу. ФК1 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання. ФК2 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі. ФК3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок. ФК4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих. ФК8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів. ФК14 Здатність демонструвати математичну грамотність, послідовно пояснити іншим математичні теорії або їх складові частини, взаємозв'язок та відмінність між ними, навести приклади застосувань у природничих науках.
Програмні результати навчання	РН1 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці. РН3 Знати принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень. РН4 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми. РН7 Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики. РН11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей.

	PH12 Відшукувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації. PH23 Знати міждисциплінарні зв'язки між математичною та іншими природничими та соціальними науками; основи міжнародного співробітництва в галузі науки та освіти; математичну мову як універсальний спосіб для моделювання природничих, технічних та соціальних процесів.
--	--

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Пререквізити: У структурно-логічній схемі освітньої програми підготовки за даної спеціальності вибіркової навчальній дисципліні “Теорія міри та інтеграл Лебега” передують нормативні компоненти (ПО1) Математичний аналіз: функції однієї змінної, (ПО2) Математичний аналіз: функції кількох змінних, (ПО9) “Вступ до теорії ймовірностей”

Постреквізити: Знання та вміння, отримані здобувачами під час вивчення цієї дисципліни, будуть потрібні їм для опанування нормативних компонент (ПО10) Функціональний аналіз, (ПО12) Методи математичної фізики, (ПО15) Теорія ймовірностей, (ПО17) Основи математичної статистики, (ПО20) Основи теорії випадкових процесів.

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Класи множин.

Тема 1.1. Основні класи множин.

Півкільце, півалгебра, кільце, алгебра, σ -кільце, σ -алгебра, монотонний клас. Їх властивості та співвідношення між ними.

Тема 1.2. σ -алгебра борелівських множин.

Теорема про збіг σ -алгебри борельових множин в $\mathbb{R}^n$ з σ -алгеброю, що породжується півкільцем інтегралів в $\mathbb{R}^n$.

Розділ 2. Функції множин. Міри та заряди.

Тема 2.1. Міра та її властивості.

Адитивність та σ -адитивність функції множин. Означення міри. Неперервність міри на кільці знизу та зверху. Загальна властивість неперервності міри Лебега-Стілтєса на півкільці інтервалів в $\mathbb{R}$ за допомогою функції розподілу. Міра Лебега на півкільці інтервалів в $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^n$.

Тема 2.2. Зовнішня міра та продовження мір.

Зовнішня міра побудована за мірою на кільці Вимірні множини, теореми Каратеодорі і Лебега-Каратеодорі. Міра Лебега на $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}^n$ та її властивості. Міра Лебега-Стілтєса на $\mathbb{R}$. Характеризація мір на $\mathbb{R}$ їх функціями розподілу.

Тема 2.2. Заряди та їх властивості.

Розвинення заряду за Ханом і Жорданом. Функції обмеженої варіації та їх зв'язок з зарядами. Теорема Жордана про представлення функції обмеженої варіації.

Розділ 3. Вимірні відображення та функції.

Тема 3.1. Вимірні відображення та функції.

Критерій вимірності. Борельові функції. Суперпозиція вимірних відображень. Властивості вимірних функцій. Теорема про наближення невід'ємної вимірної функції монотонною послідовністю невід'ємних простих функцій.

Тема 3.2. Збіжність за мірою і майже скрізь.

Збіжність майже скрізь та її властивості. Збіжність за мірою та її властивості. Теореми Лебега та Рісса про взаємозв'язок збіжності майже скрізь та збіжності за мірою.

Розділ 4. Інтеграл Лебега.

Тема 4.1. Означення інтеграла Лебега та його властивості.

Інтеграл Лебега для простої функції, від невід'ємної вимірної функції, від знакозмінних вимірних функцій. Інтегровні за Лебегом функції. Критерій інтегровності. Основні властивості інтеграла Лебега від інтегрованих функцій. Злічення адитивність інтеграла відносно множини інтегрування. Формула зміни змінних.

Тема 4.2. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

Теорема Лебега про монотонну збіжність, теорема Беппо Леві, лема Фату, теорема Лебега про мажоровану збіжність. Інтеграли Лебега, що залежать від параметра. Неперервна залежність від параметра. Диференціювання за параметром.

Тема 4.3. Інтеграл Лебега за мірою Лебега.

Порівняння інтегралів Рімана та Лебега та критерій інтегровності функції за Ріманом на відрізку прямої. Порівняння невластивих інтегралів та інтеграла Лебега на прямій. Зв'язок інтегралів Рімана-Стілтєса та Лебега-Стілтєса.

Розділ 5. Абсолютна неперервність та сингулярність.

Теорема 5.1. Похідна Радона-Нікодима.

Абсолютно неперервні міри та заряди. Теорема Радона-Нікодима. Похідна Радона-Нікодима. Заміна змінної в інтегралі Лебега. Теорема про розклад функції розподілу.

Розділ 6. Добуток мір та теорема Фубіні.

Теорема 6.1. Теорема Фубіні.

Прямий добуток вимірних просторів. Перерізи множин функцій. Добуток мір. Кратні інтеграли за добутком мір. Повторні інтеграли. Теорема Фубіні.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус., З.Г. Шефтель. Функціональний аналіз, Львів, Видавець І.Е. Чижиков, 2014. . – 560 с.
2. S. Shirali. A Concise Introduction to Measure Theory, Springer, 2018, 274 p.

Допоміжна література

3. V. Kadets. A Course in Functional Analysis and Measure Theory, Springer, 2018, 553 p.

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекційні заняття

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1	Основні класи множин. Півкільця, півалгебри, кільця, алгебри, сигма-кільця, сигма-алгебри, монотонні класи. Кільця та алгебри, що породжуються сім'єю множин. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 21-25, [3], с. 1-6.
2	Сигма-алгебра борельових множин. Теорема про структуру кільця (алгебри), породженого півкільцем. Сигма-алгебра борельових множин. Теорема про збіг сигма-алгебри борельових множин в $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ з сигма-алгеброю, що породжується півкільцем інтервалів в $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 55-57, [3], с. 7-8.
3	Основні властивості мір. Функції множин. Означення міри. Неперервність міри на кільці знизу та зверху. Монотонність, скінченна-півадитивність, сигма-півадитивність на кільці. Неперервність міри на кільці знизу та зверху. Загальна властивість неперервної міри. <i>Рекомендована література:</i> : [1], с. 26-28, [3], с. 11-22.
4	Міра Лебега. Міра Лебега на півкільці в $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$. Продовження міри Лебега в $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ з півкільця прямокутників на клас елементарних фігур. Інваріантність міри Лебега відносно зсуву. Лінійні перетворення борельових множин в $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ та їх міра Лебега. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 50-67, [3], с. 32-36.
5	Міра Лебега-Стілтєса на прямій. Визначення міри на півкільці інтервалів $\mathbb{R}$ за допомогою функції розподілу та її продовження на кільце, породжене півкільцем інтервалів. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 76-84, [3], с. 37-38.

6	Теорема Каратеодорі. Зовнішня міра та її властивості. Зовнішня міра, яка побудована за мірою на кільці. Теорема Каратеодорі та її наслідки (міра Лебега, міра Лебега-Стілтєса). <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 28-49, [3], с. 23-31.
7	Заряди та їх властивості. Заряди та їх розвинення за Ханом і Жорданом. Функції обмеженої варіації та їх зв'язок з зарядами. Теорема Жордана про представлення функції обмеженої варіації. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 85-98, [3], с. 41-44.
8	Вимірні відображення та функції. Критерій вимірності. Борельові функції. Суперпозиція вимірних відображень. Властивості вимірних функцій. Прості функції. Теорема про наближення невід'ємної вимірної функції монотонною послідовністю невід'ємних простих функцій. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 100-121, [3], с. 45-55.
9	Збіжність майже скрізь. Властивості, що мають місце майже скрізь відносно міри. Еквівалентні функції. Збіжність майже скрізь та її властивості. Теорема Егорова. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 112-121, [3], с. 56-59.
10	Збіжність за мірою. Властивості збіжності за міри. Теорема Лебега та Рісса про взаємозв'язок збіжності майже скрізь та збіжності за мірою. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 112-121, [3], с. 59-65.
11	Означення інтеграла Лебега. Інтеграл Лебега від невід'ємних простих функцій та його властивості. Інтеграл Лебега від невід'ємних вимірних функцій. Властивості цього інтеграла. Сигма-адитивність інтеграла відносно множини інтегрування. Монотонність інтеграла відносно підінтегральної функції. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 130-154, [3], с. 67-82.
12	Подальші властивості інтеграла Лебега. Теорема Лебега про монотонну збіжність для невід'ємних функцій. Лінійність інтеграла Лебега від невід'ємних функцій. Інтеграл Лебега від знакозмінних функцій. Інтегровні за Лебегом функції та критерій інтегровності. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 130-161, [3], с. 67-82.
13	Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега. Теорема Беппо Леві. Лема Фату. Теорема Лебега про мажоровану збіжність. <i>Рекомендована література:</i> [3], с. 101-105.
14	Інтеграли Лебега, що залежать від параметра. Неперервна залежність від параметра. Диференціювання за параметром. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 130-161, [3], с. 67-82.
15	Інтеграл Лебега за мірою Лебега. Порівняння інтегралів Рімана та Лебега на відрізку прямої. Критерій інтегровності функції за Ріманом на відрізку прямої. Порівняння невластних інтегралів та інтеграла Лебега на прямій. Інтеграли Лебега-Стілтєса та їх зв'язок з інтегралами Рімана-Стілтєса. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 143-147, [3], с. 93-100.
16	Абсолютно неперервні міри та заряди. Теорема Радона-Нікодима. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 202-210, [3], с. 108-113.

17	Похідна Радона-Нікодима. Заміна змінної в інтегралі Лебега. Теорема Лебега про розклад функції розподілу. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 211-222, [3], с. 108-113.
18	Теорема Фубіні. Прямий добуток вимірних просторів. Переріз множин та функцій. Добуток мір. Кратні інтеграли за добутком мір. Повторні інтеграли. Теорема Фубіні. Контрприклад до теореми Фубіні. <i>Рекомендована література:</i> [1], с. 184-199, [3], с. 115-125.

Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань (перелік дидактичного забезпечення, посилання на літературу та завдання на СРС)
1	Основні класи множин та їх властивості. Класи множин породжені даною сім'єю множин. Завдання СРС: [2], с. 4-9.
2	Еквівалентність різних означень сигма-алгебри борельових множин та приклади борельових множин. властивості міри: монотонність, півадитивність, сигма-півадитивність, адитивність, сигма-адитивність. Завдання СРС: [1], с. 55-57, [3], с. 7-8.
3	Неперервність міри на кільці знизу та зверху та нижня границя множин, неперервність міри. Властивості міри Лебега та Лебега-Стілтєса, функції розподілу мір, обчислення міри Лебега лінійно перетворених борельових множин. Завдання СРС: [1], с.21, [2], с. 9-10, 18-29, [3], с. 193-194.
4	Зовнішня міра, побудована за мірою на кільці. Вимірні множини і теорема Каратеодорі. Міра Лебега та Лебега-Стілтєса як приклади застосування теореми Каратеодорі. Завдання СРС: [1], с. 50-67, [2], с. 15-20, [3], с. 32-36.
5	Розвинення заряду за Ханом і питання його єдиності. Властивості функцій обмеженої варіації, обчислення та оцінювання варіації на відрізьку. Завдання СРС: [1], с. 85-98, [3], с. 41-44.
6	Розвинення заряду за Жорданом і представлення функції обмеженої варіації у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій. Критерії вимірності, борельові функції, суперпозиція вимірних відображень. Завдання СРС: [1], с. 85-98, [2], с. 30-34, [3], с. 41-44.
7	Властивості вимірних функцій. Збіжність майже скрізь та її властивості. Завдання СРС: [2], с. 30-40.
8	Збіжність майже скрізь та її властивості. Збіжність за мірою та її властивості Завдання СРС: [2], с. 34-44.
9	Означення інтеграла Лебега та його обчислення в найпростіших випадках. Основні властивості інтеграла Лебега від інтегровних функцій. Завдання СРС: [2], с. 45-55.

10	Формула заміни змінних. Сигма-адитивність інтеграла Лебега відносно множини інтегрування. Завдання СРС: [1], с. 130-154, [3], с. 67-82.
11	Розв'язування задач з використанням теорем про граничний перехід під знаком Лебега. Завдання СРС: [2], с. 55-62.
12	Інтеграл Лебега, що залежить від параметра: неперервна залежність від параметра, диференціювання. Завдання СРС: [2], с. 62-65.
13	Критерій інтегровності функції за Ріманом на відрізку прямої. Завдання СРС: [1], с. 143-147, [3], с. 93-100.
14	Обчислення інтегралів Лебега-Стільтєса. Завдання СРС: [1], с. 143-147, [3], с. 93-100.
15	Обчислення похідної Радона-Нікодима в простих випадках. Завдання СРС: [2], с. 65-68.
16	Застосування теореми Лебега про розклад функції розподілу. Завдання СРС: [2], с. 65-68.
17	Перерізи множин та функцій, добуток мір та кратні інтеграли Лебега за добуток мір. Повторні інтеграли. Теорема Фубіні та контрприклад до неї. Завдання СРС: [1], с. 184-199, [3], с. 115-125.
18	Модульна контрольна робота

6. Самостійна робота студента/аспіранта

Вивчення дисципліни включає наступні види самостійної роботи:

- підготовка до лекційних та практичних занять, виконання домашніх завдань;
- виконання розрахункової роботи;
- підготовка та виконання модульної контрольної роботи;
- виконання РГР;
- підготовка до заліку.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Рекомендовані методи навчання: вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт.

Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота. Вона містить читання літератури, огляд літератури за темою, підготовку до занять, виконання типового розрахунку, підготовку до МКР та іспиту.

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO) (очна\дистанційна форма)

На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (PCO) дисципліни, яка побудована на основі [Положення про систему оцінювання результатів навчання](#).

Поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий), МКР, РГР.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу, результати якого відображаються в системі [Електронний кампус](#).

Рейтингова система оцінювання включає всі види тестування: контрольні роботи, якість виконання ДКР. Кожний студент отримує свій підсумковий рейтинг з дисципліни.

Рейтинг студента з кредитного модуля розраховується виходячи із 100-бальної шкали складається з балів, які він отримує за:

- написання модульної контрольної роботи (МКР);
- виконання розрахункової роботи (РГР).

Модульна контрольна робота

Ваговий бал - 30. У випадку дистанційної форми навчання модульна контрольна робота проводиться в синхронному режимі з використанням платформи Zoom.

Розрахунково-графічна робота

Ваговий бал - 40. Розрахунково-графічна робота зараховується тільки за умови її захисту.

Домашні завдання

Для оцінювання поточної успішності студенти мають виконувати домашні завдання за темою практичного заняття. Протягом семестру планується 15 домашніх завдань, кожне з яких оцінюється максимум в 2 бали. Тобто, максимальна кількість балів за домашні завдання - $2 \cdot 15 = 30$. Кожне домашнє завдання має бути виконане і надіслане викладачу до початку наступного практичного заняття. Інакше, домашні завдання будуть зараховуватись з коефіцієнтом 0.6.

Заохочувальні бали

- за роботу на практичних заняттях. За умови гарної підготовки і активної роботи на практичному занятті студенту на кожному практичному занятті можуть бути добавлені заохочувальні бали.

- за призові місця у факультетських та університетських олімпіадах з математики.

Максимальна кількість заохочувальних балів одному студенту не може перевищувати 10% (10 балів)

Форма семестрового контролю – залік

Якщо виконано усі передбачені види робіт, то залік виставляється “автоматом” згідно рейтингу здобувача, з переведенням в оцінку за університетською шкалою. В разі недостатньої кількості балів або з метою підвищення рейтингу, дозволяється написання залікової роботи, за результатами якої здобувач отримує остаточний рейтинговий бал.

Система рейтингових(вагових) балів та критеріїв оцінювання:

Метод оцінювання	Кількість	Мінімальна оцінка в балах	Максимальна оцінка в балах
Виконання домашніх завдань	15	18	30
Модульна контрольна робота	1	18	30
Розрахунково-графічна робота	1	24	40
Підсумковий рейтинг		60	100

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компоненту)

У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з застосуванням електронної пошти, Telegram, відео-конференцій в Zoom.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено професором кафедри МА та ТЙ, д.ф.-м.н., професором Івановим О.В.

Ухвалено кафедрою МА та ТЙ (протокол № 16 від 8.07.2022 р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ(протокол №8 від 11.07.2022р.)